Министерство образования и науки Российской Федерации

Новосибирский Государственный Технический Университет

**Расчетно-графическая работа**

по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика»

**Факультет:** ПМИ

**Группа:** ПМИ-71

**Студент:** Антонов С.С.

**Преподаватель:** Карманов В.С.

**Вариант:** 1

Новосибирск, 2019

**Часть 1**

**Содержание работы**

Пусть  – выборка из заданного в соответствии с вариантом распределения.

1. Найти точечную оценку неизвестного параметра  (или некоторой функции ) по методу моментов или по методу максимального правдоподобия. Проверить полученную оценку на несмещенность, состоятельность и эффективность.
2. Найти достаточную статистику.
3. Найти функцию , допускающую эффективную оценку.
4. Построить точный доверительный интервал.
5. Построить асимптотический доверительный интервал.

**Вариант задания**

Биномиальное распределение.

Неизвестный параметр .

**Решение**

1. **Оценка параметров**

Используем метод моментов. Находим первый теоретический момент:



Приравняем теоретический и выборочный моменты, получим:

 

Используя следующие данные:



Проверим полученную оценку на:

1. Несмещенность



полученная для  оценка является несмещенной.

1. Состоятельность

Поскольку  является несмещенной оценкой, то нам достаточно исследовать дисперсию оценки .



Оценка состоятельна.

1. Эффективность









Если выполняется неравенство , то является эффективной оценкой :

 , 

Оценка эффективна.

1. **Достаточная статистика**

Воспользуемся критерием факторизации. Попробуем представить функцию правдоподобия в виде произведения: .









- достаточная статистика

1. **Функция, допускающая эффективную оценку**







1. **Построить точный доверительный интервал.**

Будем строить γ-доверительный интервал для параметра  с помощью распределения точечной оценки параметра τ(θ)=. , тогда



При выводе этой формулы мы учитываем, что величина  имеет распределение . Получаем, что функция  непрерывна и монотонна по , значит мы можем построить γ-доверительный интервал, основываясь на этой функции.

Решим относительно 1, 2 уравнения . Для простоты выкладок будем решать его в общем виде, т.е. , при этом обозначим  как С (т.к. оно не зависит ни от Г, ни от ), получим:

, , , , . Решив соответствующее уравнение при , получим 1, а при получим 2. Минимальный из них будет левой границей искомого интервала, максимальный – правой границей.

**5. Построить асимптотический доверительный интервал.**

Оценки максимального правдоподобия при достаточно общих условиях являются асимптотически эффективными и асимптотически нормальными, следовательно

,

где  – функция распределения стандартного нормального,  – информационное количество Фишера,  – ОМП. Отсюда  и, следовательно, – асимптотически кратчайший -доверительный интервал для .

Т.к., то получим асимптотический интервал:



**Часть 2**

**1. Гипотеза о виде распределения**

***Вариант задания:***

1.1. Среди 2020 семей, имеющих двух детей, 527 семей, в которых два мальчика, и 476 – две девочки. В остальных 1017 семьях дети разного пола. Проверить гипотезу о том, что количество мальчиков в семье с двумя детьми – биномиальная случайная величина.

***Решение:***

Дана выборка объема n = 2020 :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 |
|  | 476 | 1017 | 527 |

Требуется проверить гипотезу о согласии данной выборки с биномиальным законом.

Зададимся уровнем значимости .

Поскольку распределение случайных величин является дискретным, для проверки гипотезы о согласии воспользуемся критерием  Пирсона.







Оценкой максимального правдоподобия параметра является . Для данной выборки . Тогда



Статистика Пирсона:





Гипотеза о согласии данной выборки с биномиальным распределением не отвергается.

**2. Гипотеза независимости**

***Вариант задания:***

2.1. По переписи населения Швеции 1936 г. из совокупности всех супружеских пар была получена выборка 25263 пары, вступивших в брак в течение 1931 – 1936 гг. В следующей таблице приведено распределение годовых доходов (в тыс. крон) и количество детей у супружеских пар в этой выборке.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| число детей  доходы | (0, 1] | (1, 2] | (2, 3] | > 3 | Сумма |
| 0 | 2164 | 3577 | 2184 | 1636 | 9558 |
| 1 | 2755 | 5081 | 2222 | 1052 | 11110 |
| 2 | 936 | 1753 | 640 | 306 | 3635 |
| 3 | 225 | 419 | 96 | 38 | 778 |
| ≥ 4 | 39 | 98 | 31 | 14 | 182 |
| Сумма | 6116 | 10928 | 5173 | 3016 | 25263 |

***Решение:***

Для проверки гипотезы независимости воспользуемся критерием независимости . Зададимся уровнем значимости .

Статистика критерия независимости :  имеет   
- распределение с числом степеней свободы .

, , . Гипотеза о независимости признаков  и  отвергается.

**3. Гипотеза однородности**

***Вариант задания:***

3.1. Поступающие в институт абитуриенты разбиты на два потока по 300 человек в каждом. Итоги экзамена по одному и тому же предмету на каждом потоке оказались следующими: на первом потоке баллы 2, 3, 4, 5 получили соответственно 33, 43, 80, 144 человека. Соответствующие же данные для второго потока таковы: 39, 35, 72, 154. Проверить гипотезу о том, что оба потока являются однородными.

***Решение:***

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Оценка | 2 | 3 | 4 | 5 | Сумма |
| 1-й поток | 33 | 43 | 80 | 144 | 300 |
| 2-й поток | 39 | 35 | 72 | 154 | 300 |
| Сумма | 72 | 78 | 152 | 298 | 600 |

Так как выборка является группированной, то для проверки гипотезы однородности выборок первого и второго потоков можно воспользоваться критерием  Пирсона. Зададимся уровнем значимости .

Статистика критерия однородности :  имеет   
- распределение с числом степеней свободы .

, , . Гипотеза о однородности потоков принимается.